

10.1

Perusjoukkona on Etelä-Savon maakunnan kokonaispinta-ala, johon kuuluu sekä maapinta-ala että vesipinta-ala.

$$12\,652 + 4\,447 = 17\,099$$

Lasketaan tapahtuman ”meteoriitti putoaa veteen” todennäköisyys.

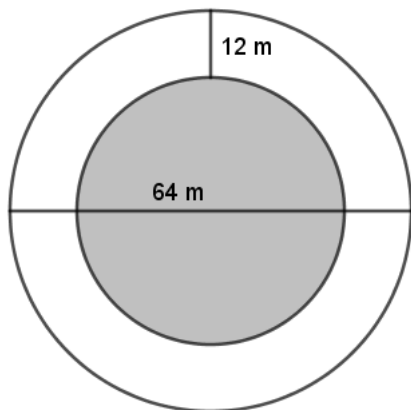
$$P(\text{meteoriitti putoaa veteen}) = \frac{4447}{17099} \approx 0,260$$

Vastaus

0,260

10.2

Hahmotellaan tilanteesta kuva.



Tapahtumalle ”linssi löytyy alle 12 m etäisyydellä reunasta” suotuisa joukko on merkitty kuvaan valkoisella pohjalla. Sen pinta-ala saadaan selville, kun pienemmän ympyrän pinta-ala vähennetään isomman ympyrän pinta-alasta.

Isomman ympyrän säde on 32 m, joten sen pinta-ala on $\pi \cdot 32^2 \approx 3216,99 \text{ (m}^2\text{)}$. Isompi ympyrä on myös koko perusjoukko.

Pienemmän ympyrän säde on 12 m lyhyempi kuin isomman ympyrän säde eli $32 - 12 = 20 \text{ (m)}$. Pienemmän ympyrän pinta-ala on $\pi \cdot 20^2 \approx 1256,64 \text{ (m}^2\text{)}$.

Valkoisen alueen pinta-ala:

$$3216,99 - 1256,64 = 1960,35 \text{ (m}^2\text{)}$$

P (linssi löytyy alle 12 m etäisyydeltä reunasta)

$$\approx \frac{1960,35 \text{ m}^2}{3216,99 \text{ m}^2}$$

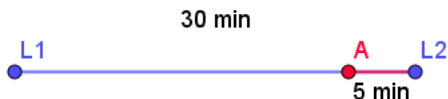
$$\approx 0,609$$

Vastaus

0,609

10.3

- a) Bussien aikataulu koostuu samanlaisia puolen tunnin jaksoista, joten riittää tutkia yhtä niistä. Havainnollistetaan tilannetta aikajanalla.



Bussi lähtee hetkellä L_1 , seuraava bussi avaa ovensa hetkellä A ja lähtee 5 minuuttia myöhemmin hetkellä L_2 .

Jotta Jaana pääsee heti bussiin, hänen on saavuttava päätepysäkille sen 5 minuutin aikana, minkä bussi on pysäkillä ovet auki.

Tapahtumalle ”pääsee suoraan bussiin” suotuisan ajanjakson pituus on 5 min.

Koko perusjoukkoa kuvaavan ajanjakson pituus on $0,5\text{h} = 0,5 \cdot 60\text{min} = 30\text{min}$.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{pääsee suoraan bussiin}) = \frac{5 \text{ min}}{30 \text{ min}} \approx 0,167$$

- b) Jotta Jaana joutuu bussiin pääsyä enemmän kuin kymmenen minuuttia, hänen on saavuttava pysäkille hetken L_1 jälkeen ja viimeistään 10 minuuttia ennen hetkeä A .



Tapahtumalle ”joutuu odottamaan enemmän kuin 10 minuuttia”
suotuisan ajanjakson pituus on $30 \text{ min} - 5 \text{ min} - 10 \text{ min} = 15 \text{ min}$.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{odottaa enemmän kuin } 10 \text{ min}) = \frac{15 \text{ min}}{30 \text{ min}} = 0,5$$

Vastaus

a) 0,167

b) 0,5

10.4

- a) Liikennevalot vaihtuvat samanlaisissa jaksoista, joten riittää tutkia yhtä niistä. Havainnollistetaan tilannetta aikajanalla.



Valot vaihtuvat vihreiksi hetkellä V_1 , valot vaihtuvat punaisiksi hetkellä P ja seuraavan kerran valot vaihtuvat vihreiksi hetkellä V_2 .

Jotta Lauri pääsee heti ylittämään kadun, hänen on saavuttava valoihin sen 1 minuutin 20 sekunnin aikana, jotka valot palavat vihreinä.

Tapahtumalle ”pääsee heti ylittämään kadun” suotuisan ajanjakson pituus on $1 \text{ min} + 20 \text{ s} = 60 \text{ s} + 20 \text{ s} = 80 \text{ s}$.

Koko perusjoukkoa kuvaavan ajanjakson pituus on $3 \text{ min} = 3 \cdot 60 \text{ s} = 180 \text{ s}$.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{pääsee heti ylittämään kadun}) = \frac{80 \text{ s}}{180 \text{ s}} \approx 0,444$$

- b) Lauri joutuu odottamaan valojen vaihtumista, jos valot ovat punaiset, kun hän saapuu paikalle.



Tapahtumalle ”joutuu odottamaan valojen vaihtumista” suotuisan ajanjakson pituus on $180 \text{ s} - 80 \text{ s} = 100 \text{ s}$.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

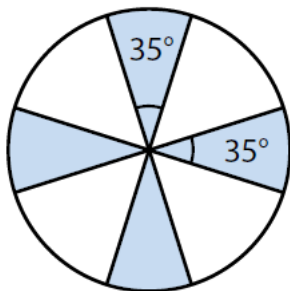
$$P(\text{joutuu odottamaan}) = \frac{100 \text{ s}}{180 \text{ s}} \approx 0,556$$

Vastaus

- a) 0,444 b) 0,556

10.5

Onnenpyörä on ympyrä ja värilliset alueet ovat sektoreita.



Käytetään geometrisena mittana kulman suuruutta. Perusjoukon mitta on täysi kulma 360° .

Tapahtumalle ”onnenpyörä pysähtyy voittoalueelle” suotuisa mitta on värillisten sektoreiden keskuskulmien summa. Sektoreita on neljä ja niistä jokaisen keskuskulma on 35° .

$$4 \cdot 35^\circ = 140^\circ$$

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

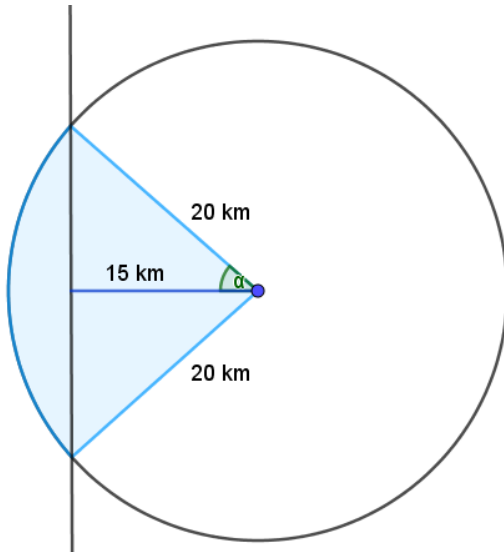
$$P(\text{onnenpyörä pysähtyy voittoalueelle}) = \frac{140^\circ}{360^\circ} \approx 0,389$$

Vastaus

0,389

10.6

Tarkastellaan tilannetta ylhäältä päin ja hahmotellaan tilanteesta kuva.



Päivän aikana kohdataan maantie, mikäli suunta valitaan kuvaan merkityltä ympyräsektorilta. Ympyrän säde on 20 km. Tien reuna ja sektoria rajaavat ympyrän säteet muodostavat tasakylkisen kolmion, jonka korkeus on 15 km.

Käytetään geometrisena mittana kulman suuruutta. Tapahtumalle ”kohdataan maantie” suotuisa mitta on sektorin keskuskulma. Perusjoukon mitta on täysi kulma 360° .

Lasketaan kulman α suuruus suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\cos \alpha = \frac{15}{20}$$

Kosini on viereisen kateetin
suhde hypotenuusaan.

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{15}{20}$$
$$\approx 41,4096^\circ$$

Sektorin keskuskulman suuruus on $2\alpha = 2 \cdot 41,4096^\circ = 82,8192^\circ$.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{kohdataan maantie}) = \frac{82,8192^\circ}{360^\circ} \approx 0,230$$

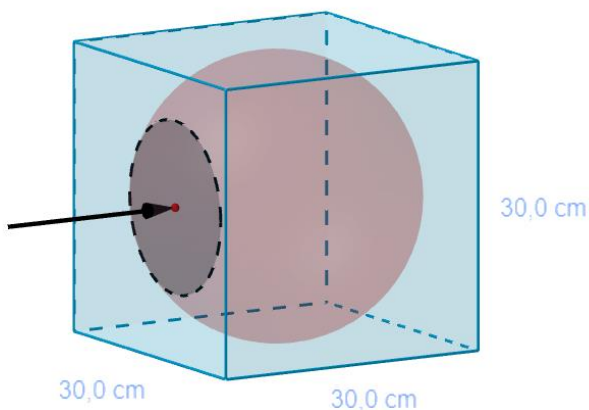
Vastaus

0,230

10.7

Kuutiossa on kuusi sivutahkoa ja ne ovat keskenään samanlaisia. Riittää siis tutkia yhtä sivutahkoa.

Siirretään appletilla neulaa niin, että se uppoaa 3,0 cm syvyyteen.



Appletti ilmoittaa harmaan ympyrän pinta-alaksi $254,47 \text{ cm}^2$. Jos neula työnnetään tahkon tälle alueelle, se osuu ilmapalloon, eli kyseessä on tapahtumalle ”neula osuu ilmapalloon” suotuisa joukko.

Koko perusjoukko on yhden sivutahkon pinta-ala. Sivutahko on neliö, joten pinta-ala on $(30,0 \text{ cm})^2 = 900 \text{ cm}^2$.

$$P(\text{neula osuu palloon}) = \frac{254,47 \text{ cm}^2}{900 \text{ cm}^2} \approx 0,283$$

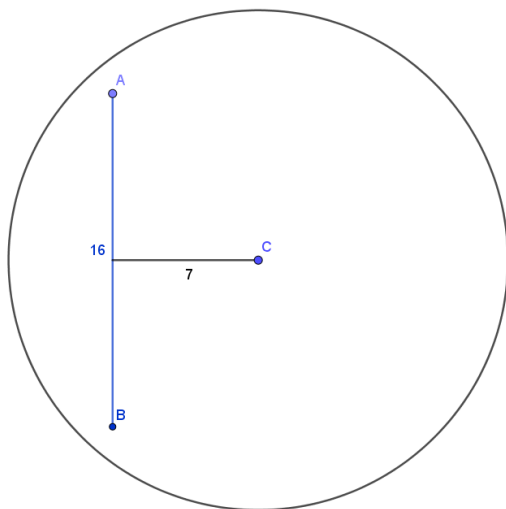
Vastaus

0,283

10.8

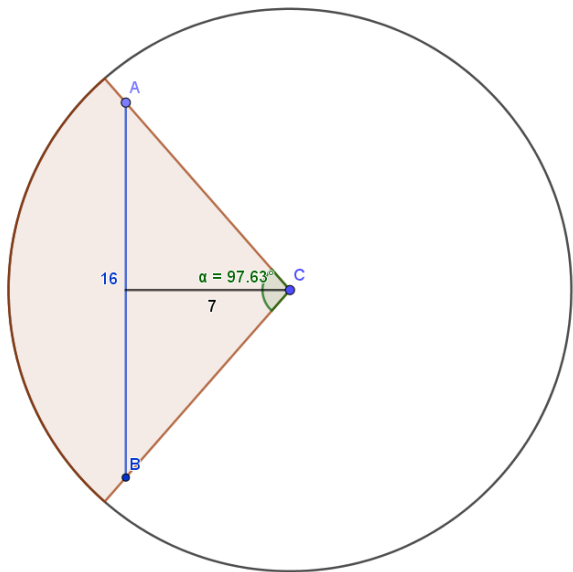
Tarkastellaan tilannetta ylhäältä päin ja hahmotellaan tilanteesta kuva geometriaohjelmalla.

Olkoon koordinaatiston yksikkö metri. Piirretään ensiksi talon seinä eli jana AB , jonka pituus on $16,0$. Piirretään seinän keskipisteestä kohtisuoraan $7,0$ etäisyydelle piste C , joka kuvaa lipputangon tyven paikkaa. Piirretään vielä piste C keskipisteenä ympyrä, jonka säde on $12,0$. Ympyrä kuvaa aluetta, jolle lipputanko voi myrskyssä kaatua.



Kuvan piirtämisessä voi käyttää apuna myös koordinaatistoa. Pisteen B voi esimerkiksi piirtää origoon $(0, 0)$, jolloin piste C piirretään pisteeseen $(7, 8)$.

Hahmotellaan kuvaan alue, johon lipputangon pitää kaatua, jotta se osuu taloon. Mitataan kulman ACB suuruus kulmatyökalulla, sillä se on myös väritettyä sektoria vastaavaan keskuskulman suuruus.



Käytetään geometrisena mittana kulman suuruutta. Tapahtumalle ”puu osuu taloon” suotuisa mitta on sektorin keskuskulma, jonka suuruus on geometriaohjelmalla mitattuna $97,63^\circ$. Perusjoukon mitta on täysi kulma 360° .

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

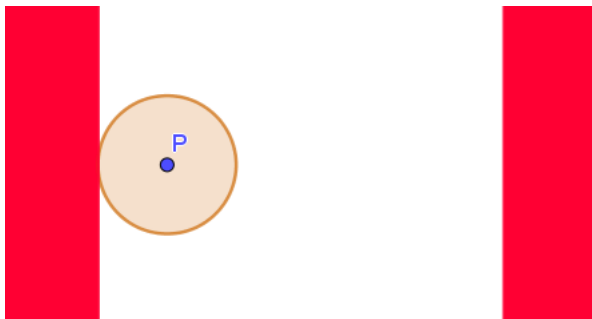
$$P(\text{puu osuu taloon}) = \frac{97,63^\circ}{360^\circ} \approx 0,271$$

Vastaus

0,271

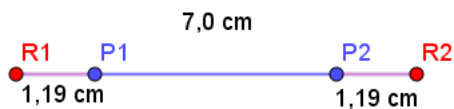
10.9

Hahmotellaan tilanteesta kuva geometriaohjelmalla. Raidat toistuvat samanlaisina koko pöytäliinan alueella, joten riittää tutkia yhtä raitaa.



Kolikko osuu yhdelle raidalle, jos sen keskipisteen etäisyys raidan reunasta on suurempi kuin kolikon säde. Kolikon säde on $\frac{2,38 \text{ cm}}{2} = 1,19 \text{ cm}$.

Havainnollistetaan tilannetta vielä janan avulla.



Kolikko osuu yhdelle raidalle, jos sen keskipiste osuu pisteiden P_1 ja P_2 väliin. Koko janan pituus on $7,0 \text{ cm}$ ja suotuisa mitta on $7,0 \text{ cm} - 1,19 \text{ cm} - 1,19 \text{ cm} = 4,62 \text{ cm}$.

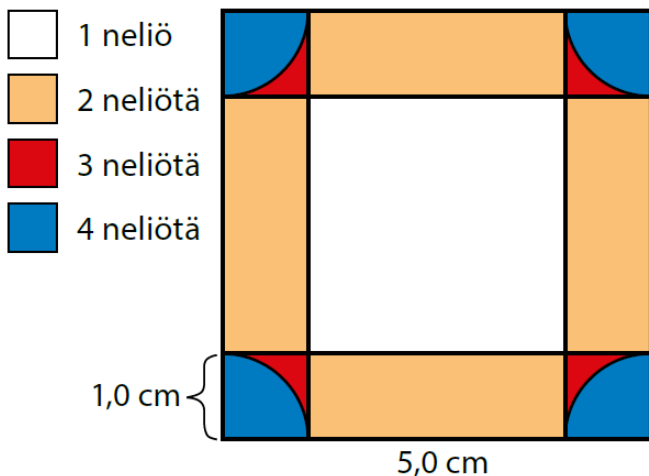
$$P(\text{kolikko kokonaan yhdellä raidalla}) = \frac{4,62 \text{ cm}}{7,0 \text{ cm}} = 0,66$$

Vastaus

0,66

10.10

Piirretään tilanteesta kuva.



- a) Jotta kolikko on kokonaan yhdellä neliöllä, pitää keskipisteen asettua valkoiselle alueelle.

Valkoisen neliön sivun pituus on $5,0 \text{ cm} - 1,0 \text{ cm} - 1,0 \text{ cm} = 3,0 \text{ cm}$.

Tapahtumalle "on kokonaan yhdellä neliöllä" suotuisa joukko on neliö, jonka pinta-ala on $3,0 \cdot 3,0 = 9,0 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Koko perusjoukkoa kuvaavan neliön pinta-ala on $5,0 \cdot 5,0 = 25 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{kokonaan yhdellä neliöllä}) = \frac{9,0 \text{ cm}^2}{25 \text{ cm}^2} = 0,36$$

- b) Jotta kolikko koskettaa täsmälleen kahta neliötä, pitää keskipisteen asettua oranssille alueelle.

Yhden oranssin suorakulmion pinta-ala on $3,0 \cdot 1,0 = 3,0 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Tapahtumalle ”koskettaa täsmälleen kahta neliötä” suotuisa joukko koostuu neljästä suorakulmiosta, joiden yhteispinta-ala on

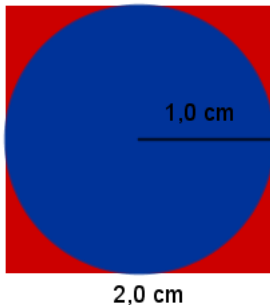
$$4 \cdot 3,0 = 12 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{koskettaa kahta neliötä}) = \frac{12 \text{ cm}^2}{25 \text{ cm}^2} = 0,48$$

- c) Jotta kolikko koskettaa täsmälleen kolmea neliötä, pitää keskipisteen asettua punaiselle alueelle.

Kulmapaloista voidaan muodostaa neliö, jonka sisällä on ympyrä.



Neliön pinta-ala on $2,0 \cdot 2,0 = 4,0 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Ympyrän pinta-ala on $\pi \cdot 1,0^2 = 3,14159 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Tapahtumalle ”koskettaa täsmälleen kolmea neliötä” suotuisa joukko on punainen alue, jonka pinta-ala on $4,0 - 3,14159 = 0,85841 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{koskettaa kolmea neliötä}) = \frac{0,85841 \text{ cm}^2}{25 \text{ cm}^2} \approx 0,0343$$

- c) Jotta kolikko koskettaa neljää neliötä, pitää keskipisteen asettua siniselle alueelle.

Tapahtumalle ”koskettaa neljää neliötä” suotuisa joukko on sininen alue, josta muodostuu ympyrä. Sen pinta-ala on $\pi \cdot 1,0^2 = 3,14159 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

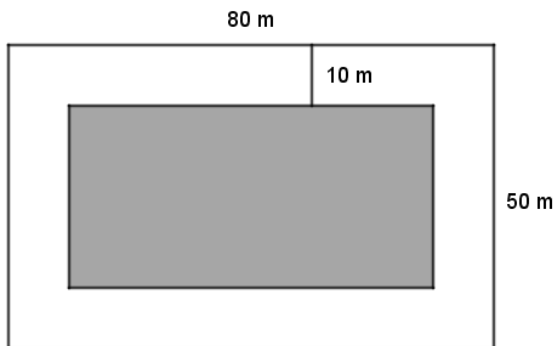
$$P(\text{koskettaa kolmea neliötä}) = \frac{3,14159 \text{ cm}^2}{25 \text{ cm}^2} \approx 0,126$$

Vastaus

- a) 0,36
- b) 0,48
- c) 0,0343
- d) 0,126

10.11

Hahmotellaan tilanteesta kuva.



Tapahtumalle ”hevosenkenkä löytyy alle 10 m etäisyydellä reunasta” suotuista joukko on merkitty kuvaan valkoisella pohjalla. Sen pinta-ala saadaan selville, kun pienemmän suorakulmion pinta-ala vähennetään isomman suorakulmion pinta-alasta.

Valkoisen alueen pinta-alan voi laskea myös esimerkiksi jakamalla valkoisen alueen neljäksi suorakulmioksi, joiden pinta-alat lasketaan.

Isomman suorakulmion pinta-ala on $80\text{ m} \cdot 50\text{ m} \approx 4000\text{ (m}^2\text{)}$. Isompi suorakulmio on perusjoukko.

Pienemmän suorakulmion sivut ovat 20 m lyhyemmät kuin isomman suorakulmion. Pienemmän suorakulmion pinta-ala on $60\text{ m} \cdot 30\text{ m} \approx 1800\text{ (m}^2\text{)}$.

Valkoisen alueen pinta-ala:

$$4000 - 1800 = 2200\text{ (m}^2\text{)}$$

P (hevosenkenkä löytyy alle 10 m etäisyydeltä reunasta)

$$= \frac{2200\text{ m}^2}{4000\text{ m}^2}$$

$$= 0,55$$

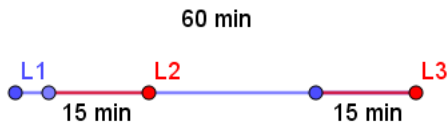
Vastaus

0,55

10.12

Sähköjunien aikataulu koostuu samanlaisia tunnin jaksoista, joten riittää tutkia yhtä niistä. Havainnollistetaan tilannetta aikajanalla.

Juna lähtee seisakkeelle hetkellä L_1 (tasatunti) ja seuraava juna hetkellä L_2 (20 minuuttia yli tasatunnin). Tämän jälkeen seuraava juna lähtee hetkellä L_3 (tasatunti).



Jotta Eero joutuu odottamaan junan lähtöä vähemmän kuin 15 min, pitää hänen saapua asemalle alle 15 minuuttia ennen lähtöhetkeä.

Tapahtumalle ”joutuu odottamaan vähemmän kuin 15 minuuttia” suotuisan ajanjakson pituus on $2 \cdot 15 \text{ min} = 30 \text{ min}$.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

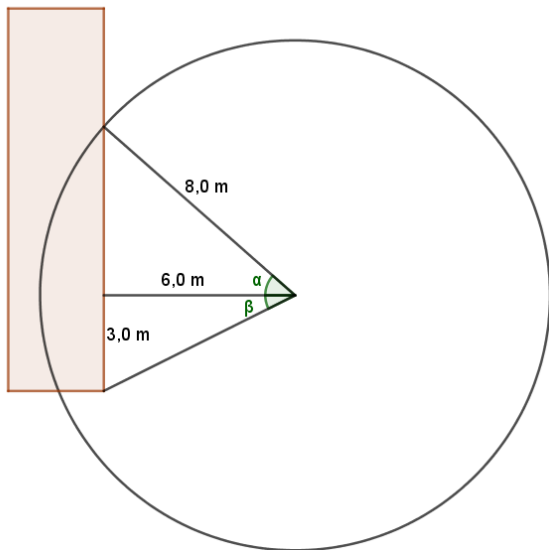
$$P(\text{odottaa vähemmän kuin } 15 \text{ min}) = \frac{30 \text{ min}}{60 \text{ min}} = 0,5$$

Vastaus

0,5

10.13

Tarkastellaan tilannetta ylhäältä päin ja hahmotellaan tilanteesta kuva.



Lipputanko osuu talon seinään, mikäli se kaatuu keskuskulmien α tai β suuntiin.

Käytetään geometrisena mittana kulman suuruutta. Tapahtumalle ”kohdataan maantie” suotuista mitta on keskuskulmien α tai β summa. Perusjoukon mitta on täysi kulma 360° .

Lasketaan kulman α suuruus suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\cos \alpha = \frac{6}{8}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{6}{8}$$

$$\approx 41,4096^\circ$$

Lasketaan kulman β suuruus suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\tan \beta = \frac{3}{6}$$

$$\beta = \tan^{-1} \frac{3}{6}$$

$$\approx 26,5651^\circ$$

Kulmien summa on $41,4096^\circ + 26,5651^\circ = 67,9747^\circ$.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{puu osuu talon seinään}) = \frac{67,9747^\circ}{360^\circ} \approx 0,189$$

Vastaus

0,189

10.14

- a) Merkitään Maan pinta-alaa kirjaimella a . Manneralueiden pinta-ala on 30 % Maan pinta-alasta. Loppuosuus pinta-alasta on merta eli merialueiden pinta-ala on 70 % Maan pinta-alasta. Tällöin merialueiden pinta-ala on $0,70a$.

$$P(\text{meteoriitti putoaa mereen}) = \frac{0,70a}{a} = 0,70 = 70\%$$

- b) Merkitään Maan pinta-alaa kirjaimella a . Tällöin manneralueiden pinta-ala on $0,30a$. Euroopan osuus maapallon manneralasta on 7 %, eli koko Maan pinta-alasta $0,07 \cdot 0,30a = 0,021a$.

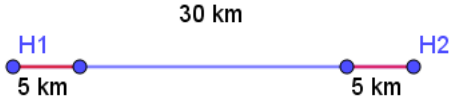
$$P(\text{meteoriitti putoaa Euroopan mantereelle}) = \frac{0,021a}{a} = 0,021 = 2,1\%$$

Vastaus

- a) $0,70 = 70\%$
b) $0,021 = 2,1\%$

10.15

Huoltoasema on alle viiden kilometrin päässä, mikäli edelliselle huoltoasemalle on matkaa alle 5 km tai seuraavalle huoltoasemalle on matkaa alle 5 km. Havainnollistetaan tilannetta janalla.



Tapahtumalle ”huoltoasema on alle viiden kilometrin päässä” suotuisa mitta on $5 \text{ km} + 5 \text{ km} = 10 \text{ km}$. Perusjoukon mitta on huoltoasemien väli 30 km.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

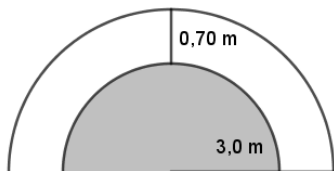
$$P(\text{huoltoasema on alle 5 km päässä}) = \frac{10 \text{ km}}{30 \text{ km}} \approx 0,333$$

Vastaus

0,189

10.16

Hahmotellaan tilanteesta kaksiulotteinen kuva. Puolipallon poikkileikkaus on puolipyörä.



Tapahtumalle ”neula on alle 70 cm etäisyydellä pinnasta” suotuisa joukko on 70 cm pallokuori. Sen tilavuus saadaan selville, kun pienemmän puolipallon tilavuus vähennetään isomman puolipallon.

Isomman puolipallon säde on 3,0 m, joten sen tilavuus on

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 3,0^3 \approx 56,5487 \text{ (m}^3\text{)}. \text{ Isompi puolipallo on koko perusjoukko.}$$

Pienemmän ympyrän säde on 0,70 m lyhyempi kuin isomman ympyrän säde eli $3,0 - 0,70 = 2,3$ (m). Pienemmän puolipallon tilavuus on

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 2,3^3 \approx 25,4825 \text{ (m}^3\text{)}.$$

Pallokuoren tilavuus:

$$56,5487 - 25,4825 = 31,0662 \text{ (m}^3\text{)}$$

$P(\text{neula on alle 70 cm etäisyydellä kasan pinnasta})$

$$\approx \frac{31,0662 \text{ m}^3}{56,5487 \text{ m}^3}$$

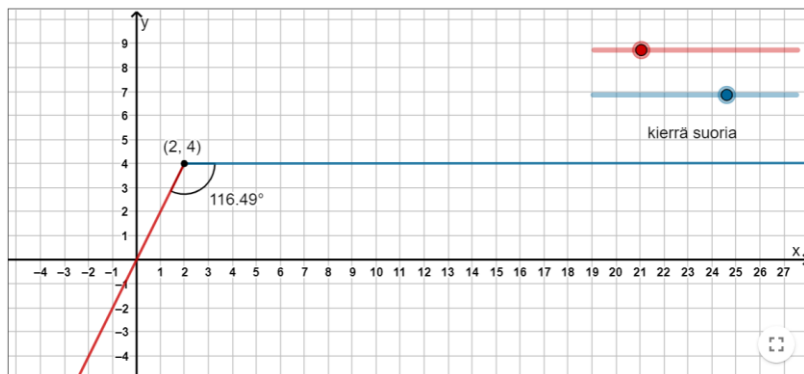
$$\approx 0,549$$

Vastaus

0,54

10.17

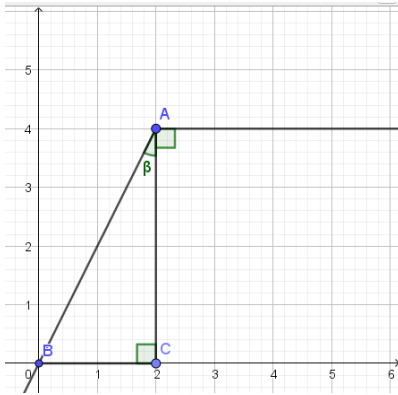
- a) Suotuisaa suuntaa rajaa toiselta puolelta pisteestä $(2, 4)$ origon $(0, 0)$ suuntaan piirretty puolisuora ja toiselta puolelta pisteestä $(2, 4)$ positiivisen x -akselin suuntaan piirretty puolisuora.



Suotuisa mitta on punaisen ja sinisen puolisuoran välinen kulma, joka on appletin perusteella $116,49^\circ$. Koko perusjoukon mitta on täysi kulma 360° .

$$P(\text{päädytään positiiviselle } x\text{-akselille}) = \frac{116,49^\circ}{360^\circ} \approx 0,324$$

b) Hahmotellaan tilanteesta kuva ja piirretään kuvaan apukolmio ABC .



Koordinaattiakselit ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, joten x -akselin suuntainen puolisuora ja y -akselin suuntainen jana AC ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa. Niiden välinen kulma on siis 90° .

Ratkaistaan kulma β suorakulmaisen kolmion avulla. Vaakasuuntaisen kateetin pituus on 2 ja pystysuuntaisen kateetin 4.

$$\tan \beta = \frac{2}{4}$$

$$\begin{aligned}\beta &= \tan^{-1} \frac{2}{4} \\ &\approx 26,5651^\circ\end{aligned}$$

Suotuista mitta saadaan laskemalla suora kulma ja kulma β yhteen.

$$90^\circ + 26,5651^\circ = 116,5651^\circ$$

$$P(\text{päädytään positiiviselle } x\text{-akselille}) = \frac{116,5651^\circ}{360^\circ} \approx 0,324$$

Vastaus

a) 0,324

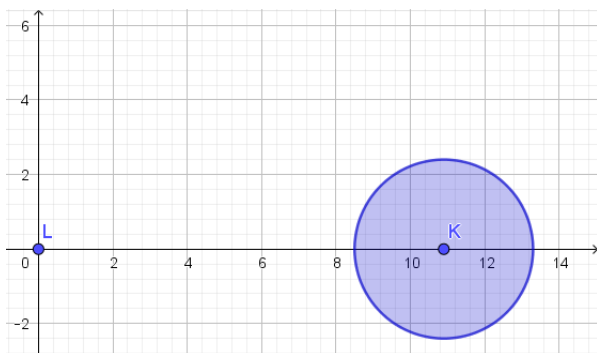
b) 0,324

10.18

Hahmotellaan tilanteesta kuva. Lammen halkaisija on 480 metriä eli sen säde on 240 m. Leiripaikasta on 850 metriä lammen rantaan.

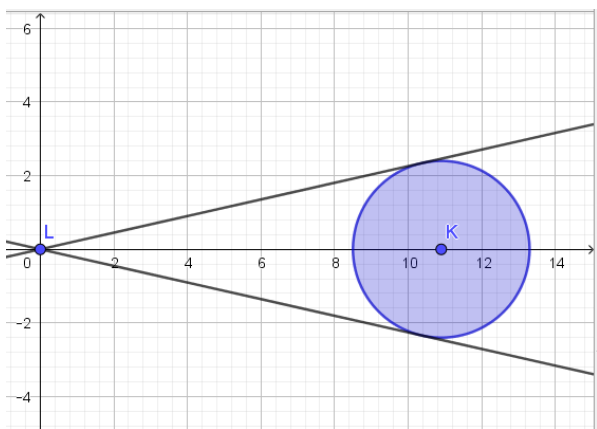
Leiripaikasta on matkaa lammen keskipisteeseen $850 + 240 = 1090$ (m).

Merkitään leiripaikkaa kirjaimella L ja lammen keskipistettä kirjaimella K .



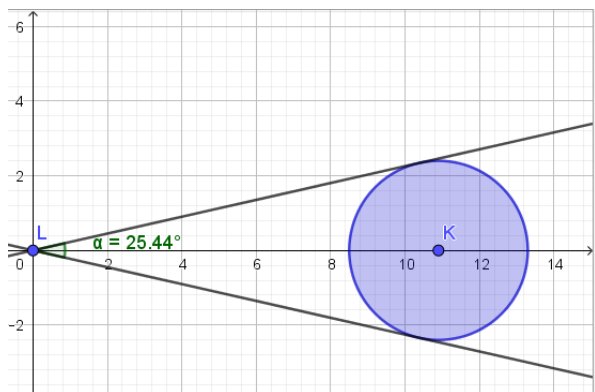
Kuvassa on käytetty mittakaava, jossa yksi ruutu vastaa 100 m.

Piirretään ympyrälle tangentit, jotka kulkevat pisteen L kautta.



Tapahtumalle ”päädytään lammen rantaan” suotuisa mitta on tangenttien välinen kulma. Koko perusjoukon mitta on täysi kulma 360° .

Mitataan tangenttien välinen kulma.



Tangenttien välinen kulma on $25,44^\circ$.

$$P(\text{päädytään lammen rantaan}) \approx \frac{25,44^\circ}{360^\circ} \approx 0,0707$$

Vastaus

0,0707

10.19

Jotta vapaa jäisi vähintään 3,0 metriä, vauriokohta voi sijaita kummassa tahansa päässä vapaa korkeintaan 2,0 metrin etäisyydellä vavan päästä. Hahmotellaan tilanteesta kuva.



Tapahtumalle ”vapaa jää vähintään 3,0 metriä” suotuisa pituus on $2,0 + 2,0 = 4,0$ (m). Koko perusjoukko on vavan alkuperäinen pituus 5,0 m.

$$P(\text{vapaa jää vähintään } 3,0 \text{ m}) = \frac{4,0 \text{ m}}{5,0 \text{ m}} = 0,8$$

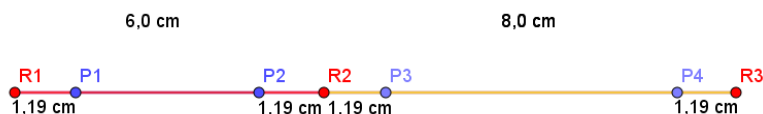
Vastaus

0,8

10.20

Kolikko asettuu niin, että se on osin valkoisen ja osin punaisen raidan päällä, jos kolikon keskipisteen etäisyys raidan reunasta on pienempi kuin kolikon säde. Kolikon säde on $\frac{2,38 \text{ cm}}{2} = 1,19 \text{ cm}$.

Havainnollistetaan tilannetta janan avulla. Valkoinen raita on merkitty kuvaan keltaisella.



Kahden vierekkäisen raidan yhteisleveys on $6,0 \text{ cm} + 8,0 \text{ cm} = 14,0 \text{ cm}$. Kolikko osuu kahdelle raidalle, jos sen keskipiste on raidan reunan R ja pisteen P välissä.

Suotuisa mitta on $4 \cdot 1,19 \text{ cm} = 4,76 \text{ cm}$.

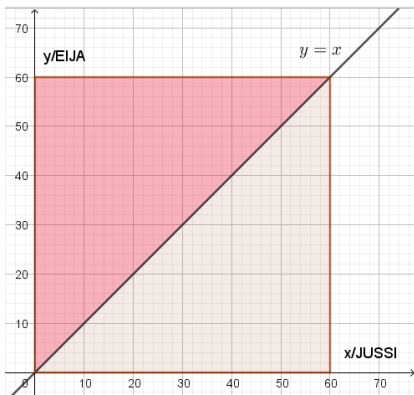
$$P(\text{kolikko osuu kahdelle raidalle}) = \frac{4,76 \text{ cm}}{14,0 \text{ cm}} = 0,34$$

Vastaus

0,34

10.21

- a) Merkitään Jussin saapumisaikaa kirjaimella x ja Eijan saapumisaikaa kirjaimella y . Kuvataan tilannetta xy -koordinaatistossa, jolloin kaikki mahdolliset lukuparit (x, y) sijaitsevat neliössä. Tilannetta, jossa Jussi ja Eija saapuvat paikalle yhtä aikaa, vastaa neliön sisällä oleva piste, joka on suoralla $y = x$. Mikäli Jussi saapuu paikalle ennen Eijaa, on $x < y$ eli $y > x$, ja suotuisa alue on neliön osa, joka on lävistäjän $y = x$ yläpuolella.



Perusjoukkoa kuvaa neliö, jonka pinta-ala on $60 \cdot 60 = 3600$.

Neliön sivu kuvaa tuntia ja tunnissa on 60 minuuttia.

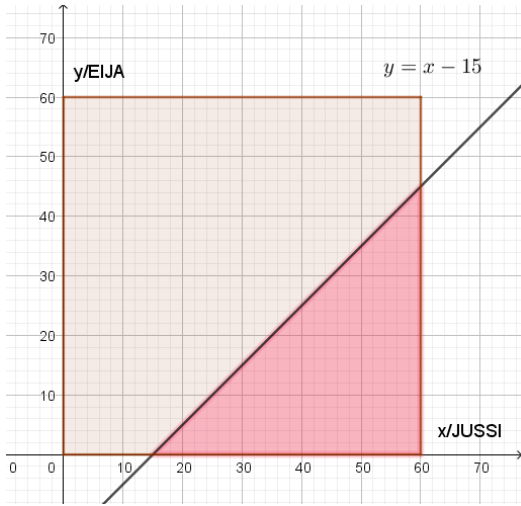
Suotuisaa joukkoa kuvaa punertava kolmio, jonka kanta on 60 ja korkeus 60. Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$\frac{60 \cdot 60}{2} = 1800$$

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{Jussi saapuu ennen Eijaa}) = \frac{1800}{3600} = 0,5$$

- b) Tilannetta, jossa Eija joutuu odottamaan yli 15 minuuttia, kuvaavat pisteet (x, y) sijaitsevat neliön siinä osassa, jossa toteutuu ehto $x > y + 15$ eli $y < x - 15$.



Suotuisaa joukkoa kuvaa punertava kolmio, joka jää suoran alapuolelle. Kolmion kanta on $60 - 15 = 45$ ja korkeus $60 - 15 = 45$. Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$\frac{45 \cdot 45}{2} = 1012,5$$

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{Eija odottaa Jussia yli 15 min}) = \frac{1012,5}{3600} \approx 0,281$$

Vastaus

a) 0,5

b) 0,281

10.22

- a) Positiivisen luvun neliö x on pienempi kuin 3, kun $x < \sqrt{3}$. Suotuisa joukko on siis $x < \sqrt{3}$.

Koko perusjoukkoa kuvaa väli $0 < x < 2$.

Kuvataan tilannetta lukusuoralla.



Suotuisaa joukkoa kuvaavan välin pituus on $\sqrt{3} - 0 = \sqrt{3}$ ja koko perusjoukkoa kuvaavan välin pituus $2 - 0 = 2$.

Lasketaan tapahtuman ”luvun neliö on pienempi kuin 3” todennäköisyys.

$$P(\text{luvun neliö on pienempi kuin } 3) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$$

- b) Tehtävän laatija sai 89 kertaa luvun, jonka neliö on alle 3.

Väliltä $0 < x < 2$ voidaan arpoa satunnaisluku CAS-laskimella esimerkiksi komennolla `2·Satunnaisluku()` tai `2·rand()`.

Luvulle $\frac{\sqrt{3}}{2}$ saadaan siis likiarvo $\frac{89}{100} = 0,89$. Ratkaistaan luvun $\sqrt{3}$ likiarvo.

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,89 \quad | \cdot 2$$

$$\sqrt{3} \approx 1,78$$

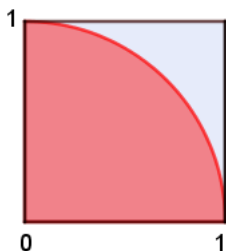
Vastaus

- a) 0,866 b) $\sqrt{3} \approx 1,78$

10.23

- a) Suotuisa joukko tapahtumalla ”etäisyys on pienempi kuin 1” on neljännes ympyrästä, jonka säde on 1 ja jonka keskipiste sijaitsee origossa.

Piirretään tilanteesta kuva.



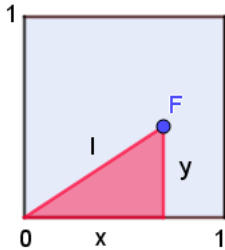
Perusjoukko on neliö, jonka sivun pituus on 1. Neliön pinta-ala on $1 \cdot 1 = 1$.

Sektorin pinta-ala on $\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{4}$.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{pisteen etäisyys on pienempi kuin } 1) = \frac{\frac{\pi}{4}}{1} = \frac{\pi}{4} \approx 0,785$$

- b) Pisteen etäisyys saadaan suorakulmaisen kolmion ja Pythagoraan lauseella pisteen x - ja y -koordinaattien avulla.



Pisteen etäisyys origosta on hypotenuusan pituus. Merkitään etäisyyttä kirjaimella l .

$$l^2 = x^2 + y^2$$

$$l = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- c) Tehtävän laatija sai 77 kertaa pisteen, jonka etäisyys on alle 1.

Kyseistä satunnaiskoetta voidaan simuloida laskimella esimerkiksi

komennolla $\sqrt{(\text{Satunnaisluku}())^2 + (\text{Satunnaisluku}())^2}$ tai

$\sqrt{(\text{rand}())^2 + (\text{rand}())^2}$.

Luvulle $\frac{\pi}{4}$ saadaan siis likiarvo $\frac{77}{100} = 0,77$. Ratkaistaan luvun π likiarvo.

$$\frac{\pi}{4} \approx 0,77 \quad 4$$

$$\pi \approx 3,08$$

Vastaus

- a) 0,785 b) $\sqrt{x^2 + y^2}$ c) $\pi \approx 3,08$